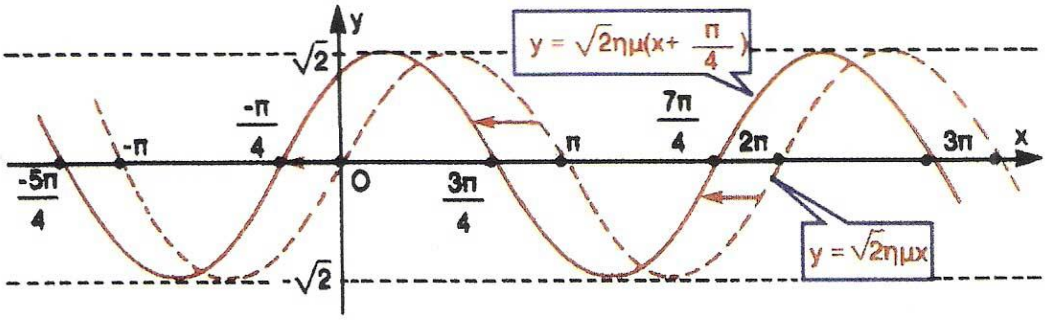
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ

Άλγεβρα

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός • Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος • Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου

Παπασταυρίδης Στάυρος • Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αμαρουσίου

Σβέρκος Ανδρέας • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα Εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας για τη Β' τάξη του Γενικού Λυκείου. Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Από το βιβλίο αυτό αφαιρέθηκε το κεφάλαιο «Πρόοδοι» και προστέθηκαν δύο κεφάλαια: το κεφάλαιο «Συστήματα» και το κεφάλαιο «Ιδιότητες Συναρτήσεων», τα οποία προέρχονται από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Επίσης το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), εμπλουτίστηκε με το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010).

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

<u>Στο 1ο Κεφάλαιο</u> γίνεται μια επανάληψη των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα οποία οι μαθητές έχουν μελετήσει στο Γυμνάσιο, και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση και διερεύνηση τέτοιων συστημάτων. Επίσης, επιλύονται και γραμμικά συστήματα με τρείς αγνώστους καθώς και μη γραμμικά συστήματα.

<u>Στο 2ο Κεφάλαιο </u>εξετάζονται ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεων τους,

όπως η μονοτονία, τα ακρότατα και οι συμμετρίες μιας συνάρτησης, καθώς και η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Στο $3^{ο}$ Κεφάλαιο επεκτείνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί με την εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται στη γενικότητά τους οι τριγωνομετρικές ταυτότητες. Επίσης, ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα και επιλύονται τριγωνομετρικές εξισώσεις. Τέλος χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών τριγώνου για τον υπολογισμό των στοιχείων του.

Στο $4^{ο}$ Κεφάλαιο τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

Στο $5^{ο}$ Κεφάλαιο εισάγονται η
εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση αx + βy = γ

Στο Γυμνάσιο διαπιστώσαμε με την βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση
αx + βy = γ , με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$,
που λέγεται γραμμική εξίσωση, παριστάνει ευθεία γραμμή. Στη συνέχεια
θα αποδείξουμε το συμπέρασμα αυτό ως εξής:
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

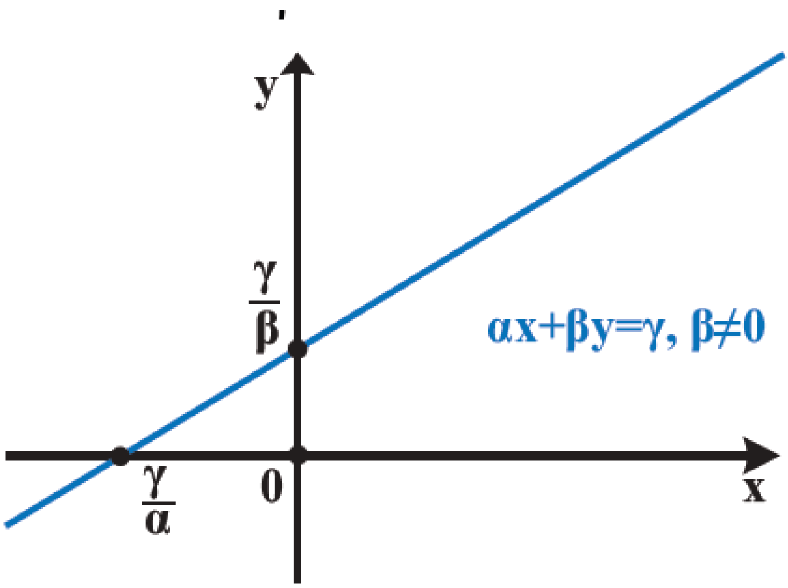
- **Αν $\beta \neq 0$,**
  τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow$$
$$\beta y = -\alpha x + \gamma \Leftrightarrow$$
$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta},$$

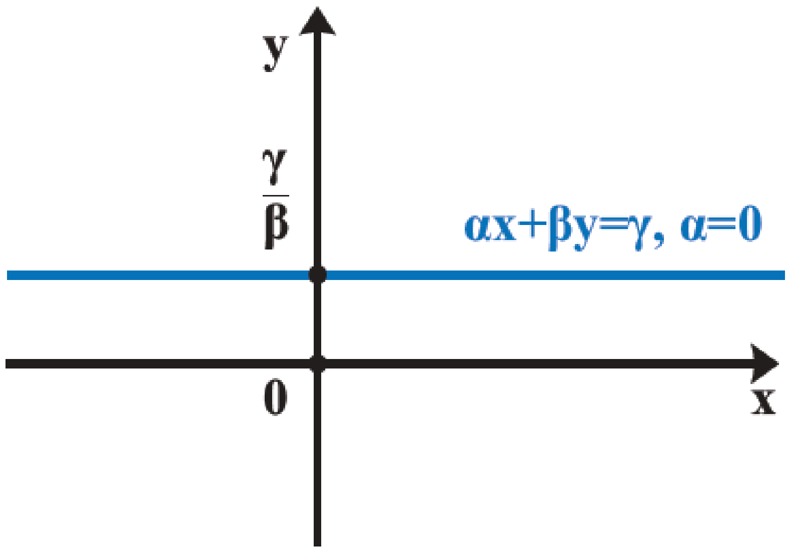
Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$$

και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$.



Σχήμα α΄



Σχήμα β΄

Ειδικότερα:

- ✓ **Αν $\alpha \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α΄), ενώ**
- ✓ **Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή**

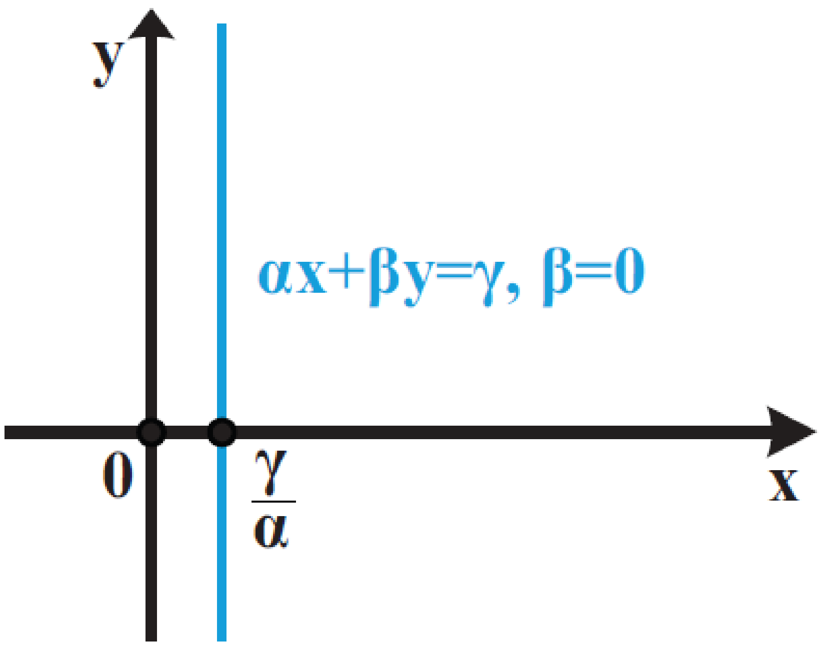
$y = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως

παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x ' x και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$ (Σχ. β΄).

- Αν β = 0 (οπότε $\alpha \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\beta}.$$

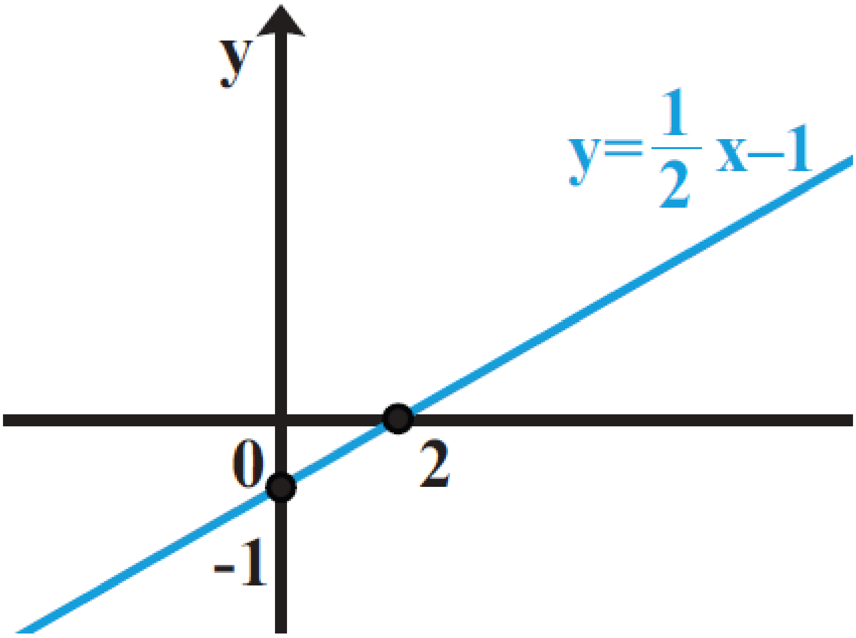
Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y ' y και τέμνει τον άξονα x ' x στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.



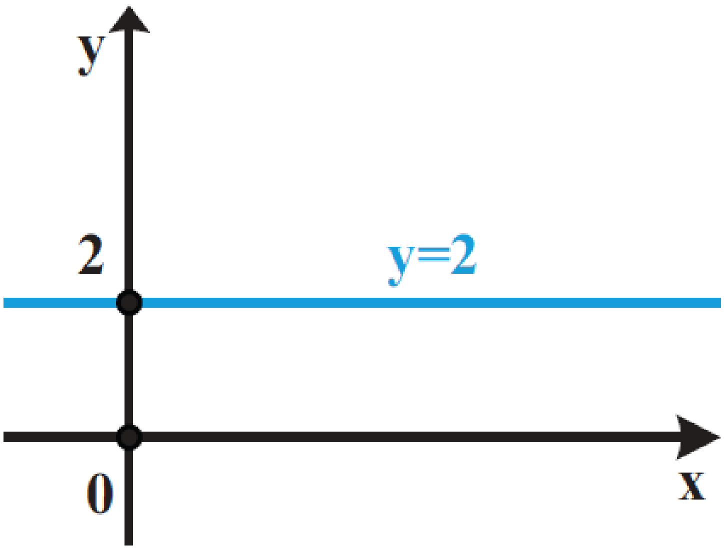
Για παράδειγμα:

✓ Η εξίσωση x-2y=2 παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή

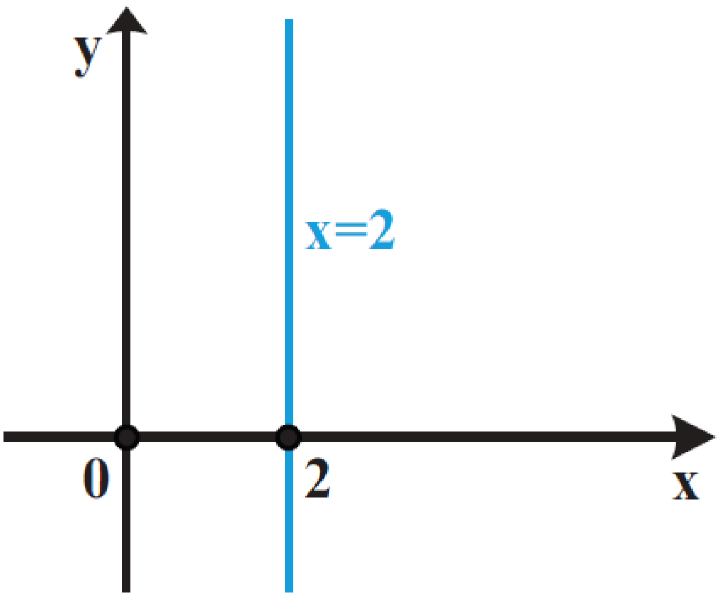
διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο -1.



- ✓ **Η εξίσωση y=2 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x ' x και τέμνει τον άξονα y ' y στο σημείο 2.**



- ✓ **Η εξίσωση x=2 παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y ' y και τέμνει τον άξονα x ' x στο σημείο 2 .**



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται λύση της γραμμικής εξίσωσης.

Για παράδειγμα, το ζεύγος (4,-1) είναι λύση της εξίσωσης x-2y=6 , αφού 4-2(-1) =4+2=6 .

Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη (16,5) , (-10,-8) είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k, \frac{1}{2}k - 3\right)$, $k \in \mathbb{R}$ **είναι λύση της εξίσωσης.**

Γραμμικό σύστημα 2 x 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και α΄x+β΄y=γ΄ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο

εξισώσεων με δύο αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 2 x 2 και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται λύση του συστήματος .
Στο Γυμνάσιο μάθαμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων.

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται ισοδύναμα συστήματα.

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

- **Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.**
- **Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε') του συστήματος, π.χ. την (ε), με την εξίσωση «$\lambda \cdot (\varepsilon) + \lambda' \cdot (\varepsilon')$» που προκύπτει, αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda \neq 0$, προσθέσουμε τα μέλη της (ε') πολλαπλασιασμένα με λ'.**

Η εξίσωση $\lambda \cdot (\varepsilon) + \lambda' \cdot (\varepsilon')$ λέγεται γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (ε) και (ε').

Η απόδειξη του ότι τα συστήματα που προκύπτουν από τις παραπάνω μετατροπές είναι ισοδύναμα στηρίζεται στις παρακάτω ιδιότητες της ισότητας
που είδαμε στο 1ο κεφάλαιο:

- ✓ **Αν** $\gamma \neq 0$**, τότε:** $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$
- ✓ **Αν α=β και γ=δ , τότε** $\alpha + \gamma = \beta + \delta$**.**

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 & (1) \\ 3x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα με τις δύο μεθόδους που μάθαμε στο Γυμνάσιο, τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών
(ή μέθοδο της απαλοιφής)

<u>Μέθοδος της αντικατάστασης</u>

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x . Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε
και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$3(2y + 6) + 4y = 8$$
$$\Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8$$
$$\Leftrightarrow 10y = -10$$
$$\Leftrightarrow y = -1$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο:

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (4,-1).

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή κάνουμε πολλά βήματα μέχρι να λύσουμε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να κάνουμε λάθος στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή να κάνουμε επαλήθευση του συστήματος.

Στο συγκεκριμένο σύστημα, για x=4 και $y = -1$, έχουμε:
<u>1η εξίσωση:</u> $4 - 2(-1) = 6$
<u>2η εξίσωση:</u> $3 \cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

<u>Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)</u>

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \left| \begin{matrix} (-3) \\ 1 \end{matrix} \right.$$

ή ισοδύναμα $\begin{cases} -3x+6y=-18 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$-3x+6y+3x+4y=-18+8$$
$$\Leftrightarrow 10y=-10 \Leftrightarrow y=-1$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου:

$$x-2(-1)=6 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4.$$

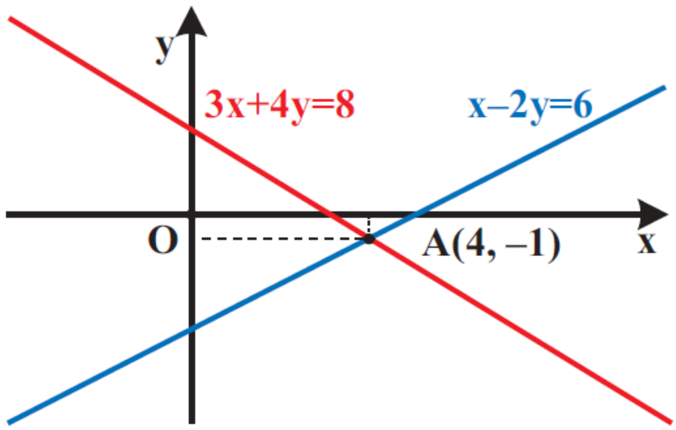
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (4,-1) (η ίδια φυσικά που βρέθηκε και με την προηγούμενη μέθοδο).

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.



Γενικά, μπορούμε να επιλύσουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

με το να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του και να βρούμε, εφόσον υπάρχει, το σημείο τομής τους.
Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 δίνει λύσεις που μπορεί να είναι προσεγγιστικές. Παρά την αδυναμία αυτή, η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 διευκολύνει πάρα πολύ σε περιπτώσεις, όπου μας ενδιαφέρουν μόνο προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος ή, ακόμη, όταν η αλγεβρική του επίλυση είναι δυσχερής

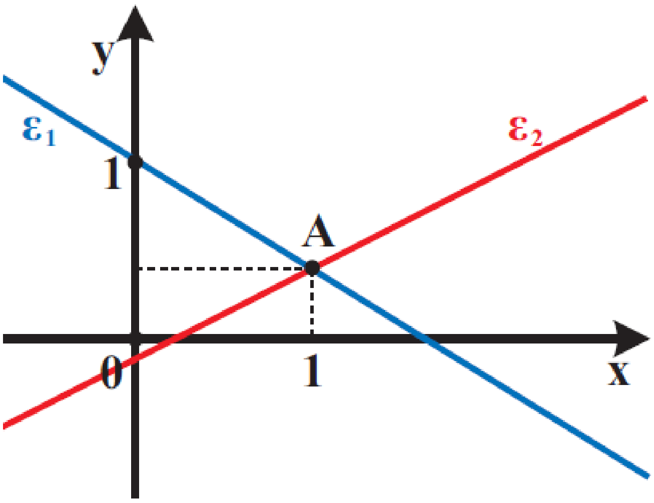
Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή ακόμα και να συμπίπτουν.

Για παράδειγμα:

✓ **Το σύστημα** $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 4x-9y=1 \end{cases}$ **γράφεται** $\begin{cases} y=-\dfrac{2}{3}x+1 \\ y=\dfrac{4}{9}x-\dfrac{1}{9} \end{cases}$

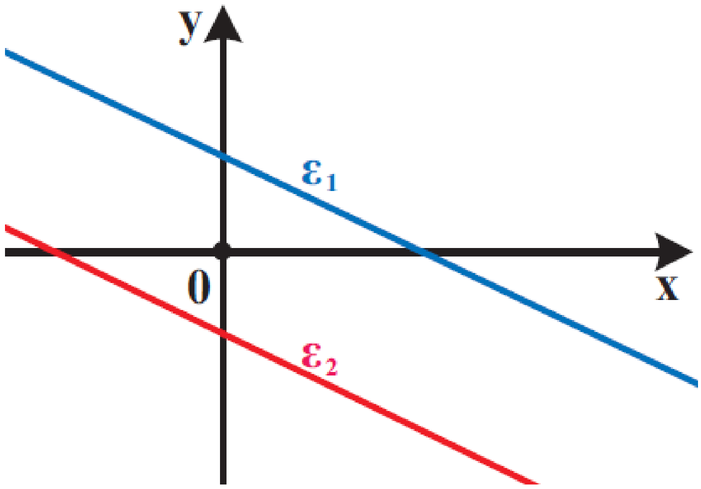
και έχει μοναδική λύση, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του τέμνονται, επειδή έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης.

Αν χαράξουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις, βλέπουμε ότι προσεγγιστικά η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος (1, 0,3) . Αν όμως λύσουμε το σύστημα αλγεβρικά, θα βρούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.



✓ **Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ γράφεται**

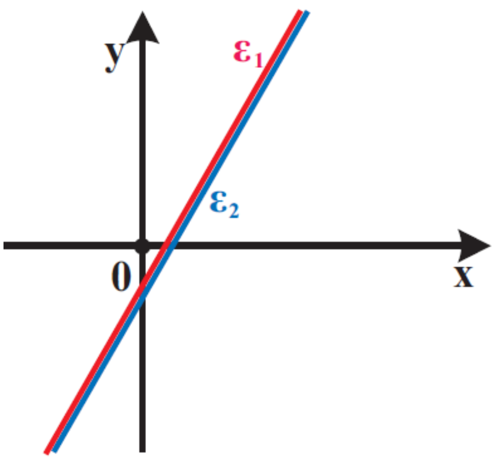
$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4} \end{cases}$**, οπότε είναι αδύνατο, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες.**



✓ **Το σύστημα** $\begin{cases} y+1=2x \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ **γράφεται**

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$**,**

οπότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν. Προφανώς κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής
$(k,2k-1)$**,** $k \in \mathbb{R}$**.**



Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 αναμένουμε μια

μόνο από τις περιπτώσεις:

- ✓ **Το σύστημα να έχει μοναδική λύση**
- ✓ **Το σύστημα να είναι αδύνατο**
- ✓ **Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.**

Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Στη παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 στη γενική του μορφή.

Έστω λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση που είναι $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$. Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x + \dfrac{\gamma}{\beta} & (\varepsilon 1) \\[2ex] y = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}x + \dfrac{\gamma'}{\beta'} & (\varepsilon 2) \end{cases}$$

και οι εξισώσεις του παριστάνουν ευθείες ε1 και ε2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

- **Αν $-\dfrac{\alpha}{\beta} \neq -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε1 και ε2 έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη προσδιορίζεται από την λύση της εξίσωσης**

$$-\frac{\alpha'}{\beta'}x+\frac{\gamma'}{\beta'}=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha'}{\beta'}\right)x=\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\gamma'}{\beta'}$$

$$\Leftrightarrow(\alpha\beta'-\alpha'\beta)x=\gamma\beta'-\gamma'\beta$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$$

Η τεταγμένη του σημείου τομής είναι:

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\right)+\frac{\gamma}{\beta}=$$

$$=\frac{-\alpha\gamma\beta'+\alpha\beta\gamma'+\gamma\alpha\beta'-\gamma\alpha'\beta}{\beta(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}=$$

$$=\frac{\beta(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)}{\beta(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}$$

Επομένως $y=\dfrac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}\right)$$

- **Αν** $-\dfrac{\alpha}{\beta}=-\dfrac{\alpha'}{\beta'}$**, δηλαδή αν αβ΄-α΄β =0 , τότε οι ευθείες ε1 και ε2 έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, οπότε ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις αντιστοίχως.**

Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και στην περίπτωση που είναι β=0 ή β'=0 .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Έχουμε:

- **Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την**

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

- **Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο.**

Συνήθως η παράσταση $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, συμβολίζεται με

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

και λέγεται ορίζουσα του συστήματος

Δηλαδή:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta.$$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στην θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta.$$

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα τα οποία αφορούν στην επίλυση ενός
γραμμικού συστήματος συνοψίζονται, με την βοήθεια των οριζουσών, ως εξής:

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- **Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, την (x,y) με $x = \dfrac{D_x}{D}$ και $y = \dfrac{D_y}{D}$**
- **Αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.**

Για παράδειγμα:

✓**Το σύστημα** $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ **έχει**

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3(-2),$$

$$= 4 + 6 = 10 \neq 0$$

οπότε έχει μοναδική λύση. Επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40 \qquad \text{και}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, -1)$.

✓Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$ **έχει**

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 4(-3)$$

$$= -12 + 12 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases},$$

δηλαδή έχει μόνο μία εξίσωση την 2x-3y=40 . Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2x-3y=40 \Leftrightarrow y=\frac{2x-40}{3}.$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων τα ζεύγη της μορφής

$$\left(k,\frac{2k-40}{3}\right), \quad k\in\mathbb{R}$$

✓Το σύστημα $\begin{cases}3x+y=11\\9x+3y=6\end{cases}$ **έχει**

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1\\9 & 3\end{vmatrix}=9-9=0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Το σύστημα αυτό γράφεται

$$\begin{cases}3x+y=11\\3x+y=2\end{cases}$$

που είναι προφανώς αδύνατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1η Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases}\lambda x-y=\lambda-1\\\lambda^2x-2y=\lambda\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι του συστήματος δεν είναι όλοι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά εξαρτώνται από το λ. Πρέπει επομένως για τις διάφορες τιμές του λ, να εξετάσουμε πότε προκύπτει σύστημα που έχει μοναδική λύση την οποία και να βρούμε ή πότε προκύπτει σύστημα αδύνατο ή σύστημα

με άπειρες λύσεις. Όπως και στις εξισώσεις, ο λ λέγεται παράμετρος και η εργασία αυτή λέγεται διερεύνηση. Έχοντας υπόψη τον παραπάνω πίνακα, ακολουθούμε την εξής πορεία.

• Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x ,D_y . Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2$$

$$= \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-2(\lambda - 1) + \lambda = 2 - \lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \lambda^2(\lambda - 1)$$

$$= \lambda^2(1 - \lambda + 1) = \lambda^2(2 - \lambda)$$

• Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες είναι D = 0 . Έχουμε:

$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$\text{ή} \quad \lambda = 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , με:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2 - \lambda}{\lambda(\lambda - 2)} = \frac{-(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(2 - \lambda)}{\lambda(\lambda - 2)} = \frac{-\lambda^2(\lambda - 2)}{\lambda(\lambda - 2)} = -\lambda.$$

Δηλαδή, για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι
το ζεύγος $\left(-\dfrac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$.

✓**Αν D = 0 , δηλαδή αν λ = 0 ή λ = 2 , τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Συγκεκριμένα:**

- **Αν λ = 0 , τότε το σύστημα γράφεται**

$$\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

και άρα είναι αδύνατο.

- **Αν λ = 2 , τότε το σύστημα γράφεται**

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

και άρα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Επειδή

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1,$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής $(k, 2k-1)$, $\quad k \in \mathbb{R}$.

Γραμμικό Σύστημα 3 x 3

Μία εξίσωση της μορφής αx+βy+γz=0 , με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές α, β, γ διάφορο του μηδενός, λέγεται γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους.

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει.

Για παράδειγμα η εξίσωση 2x+3y+z=6 είναι μια γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους και η τριάδα (2,-1,5) είναι μια λύση της εξίσωσης, αφού
$2 \cdot 2 + 3(-1) + 5 = 6$ **.**

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους:

$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1$ **,**

$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$ **και**

$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3$

και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή, πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3 και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 .

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -9 & (1) \\ x + 3y - z = 10 & (2) \\ 3x + y - z = 8 & (3) \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς ένα άγνωστο, π.χ. την (3) ως προς z, και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι έχουμε:

$$3x + y - z = 8 \Leftrightarrow z = 3x + y - 8 \qquad (4)$$

οπότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

$$2x - y + 3z = -9 \Leftrightarrow$$

✓ $$2x - y + 3(3x + y - 8) = -9 \Leftrightarrow \qquad (5)$$

$$11x + 2y = 15$$

$$x + 3y - z = 10 \Leftrightarrow$$

✓ $$x + 3y - (3x + y - 8) = 10 \Leftrightarrow \qquad (6)$$

$$-x + y = 1$$

Οι (5), (6) ορίζουν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 11x + 2y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases},$$

από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε ότι x=1 και y=2 .

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x και y στην (4) και βρίσκουμε $z = -3$.

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα (1,2,-3) .

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3 x 3, όπως είδαμε παραπάνω, ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 , προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3 ή έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

i) αλγεβρικά **ii) γραφικά.**

2. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{2}+\dfrac{2y+1}{7}+2=0 \\ \dfrac{x+6}{3}-\dfrac{y-6}{2}=8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3}4-\dfrac{y+2}{4} \\ \dfrac{x+3}{2}-3=\dfrac{x-y}{3} \end{cases}$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \dfrac{x}{3}-y=-2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2y=x+2 \\ \dfrac{1}{2}x-y+1=0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

i) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2y=3x-8 \\ x+3y+1=0 \end{cases}$

6. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 6x+7y=100 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 4x-6y=80 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 3x+y=11 \\ -9x-3y=2 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$

ii) $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y=7 \\ \dfrac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1 \end{cases}$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 3x - 2y - \omega = 11 \\ 2x - 5y - 2\omega = 3 \\ 5x + y - 2\omega = 33 \end{cases}$

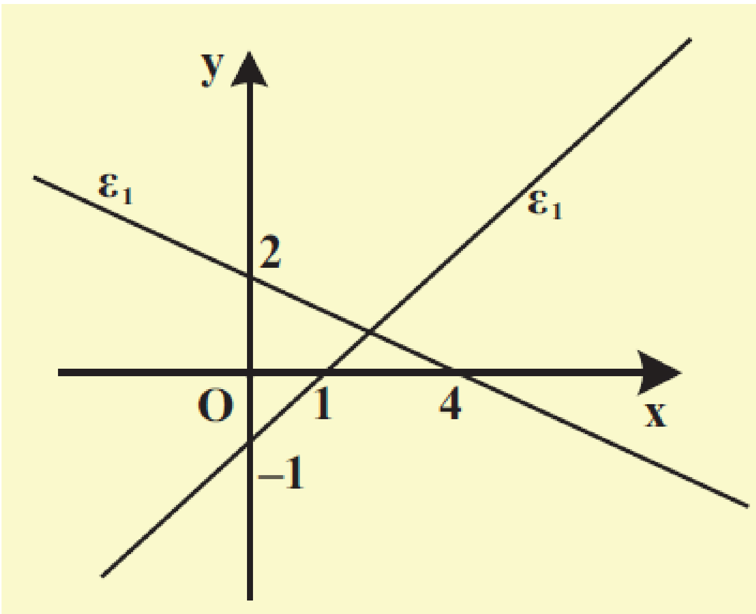
ii) $\begin{cases} 5x - y + 3\omega = 4 \\ x - 3y + \omega = 2 \\ 3x - 2y + 2\omega = 2 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - 2\omega = 3 \\ \dfrac{3x}{2} + y + \omega = 5 \\ 5x + 3y - 2\omega = 16 \end{cases}$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε1 και ε2 του παρακάτω σχήματος.

ii) Ποιο σύστημα ορίζουν ε1 και ε2 και ποια είναι η λύση του συστήματος;



2. Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

3. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

4. Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο R =αT + β . Αν στους 20oC η αντίσταση ήταν 0,4 Ω και στους 80oC η αντίσταση ήταν 0,5 Ω , να βρείτε τα α και β .

5. Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + 4y = 3$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ε1 και ε2 .
ii) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;
iii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες είναι παράλληλες;

7. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των ευθειών:
i) $\varepsilon_1 : \alpha x + y = \alpha^2$ και $\varepsilon_2 : x + \alpha y = 1$.

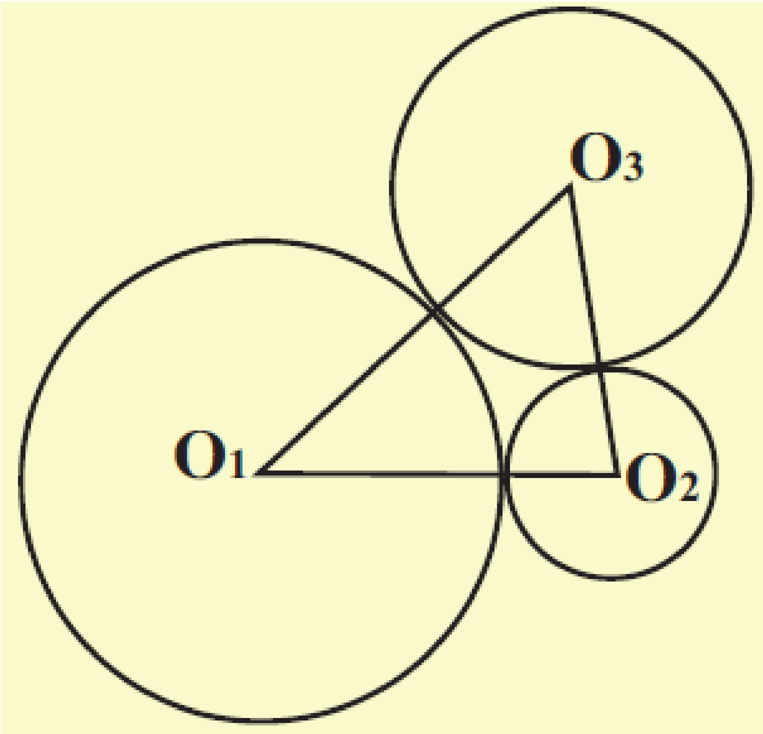
ii) $\varepsilon_3 : \alpha x - y = \alpha$ **και** $\varepsilon_2 : x + \alpha y = 1.$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

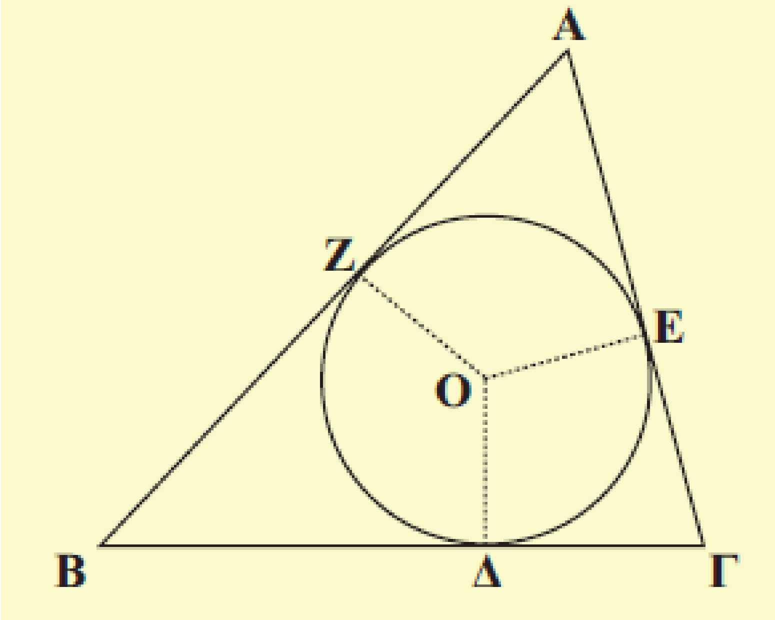
i) $\begin{cases} (\lambda-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda+1)y = -2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

9. Οι κύκλοι του παρακάτω σχήματος εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ισχύει $O_1O_2 = 6$, $O_1O_3 = 5$ και $O_2O_3 = 7$. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.

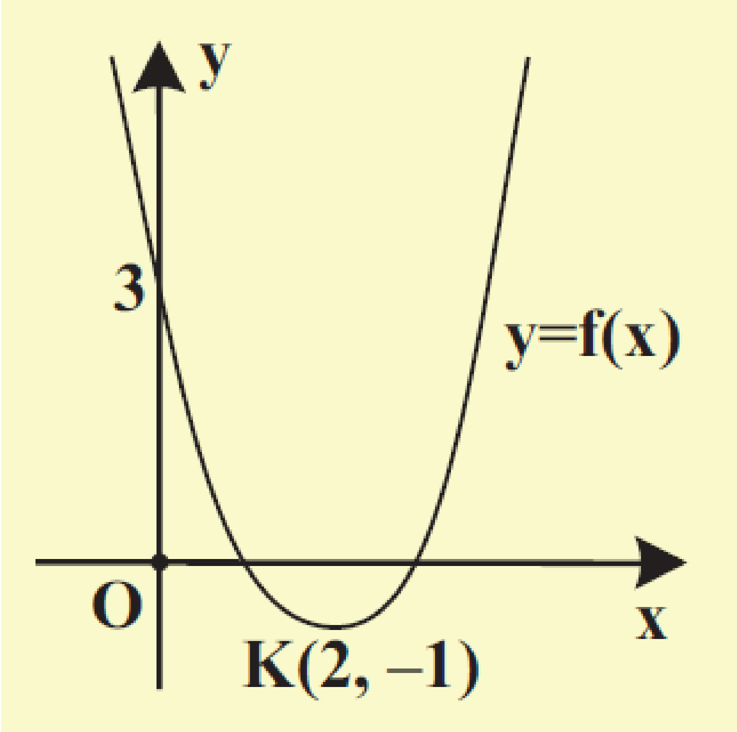


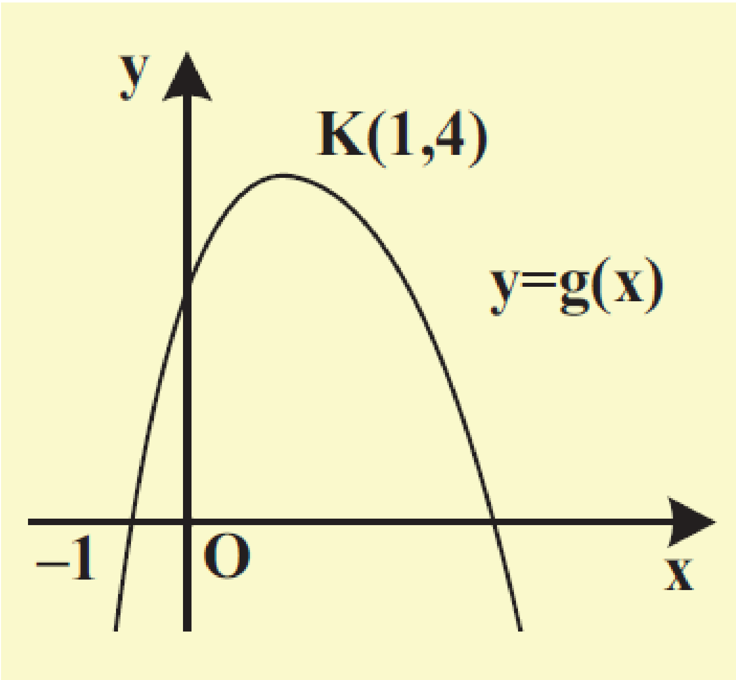
10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών στα σημεία Δ, Ε και Ζ. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΖ = x , ΒΔ = y και ΓΕ = z , συναρτήσει των πλευρών α , β και γ .

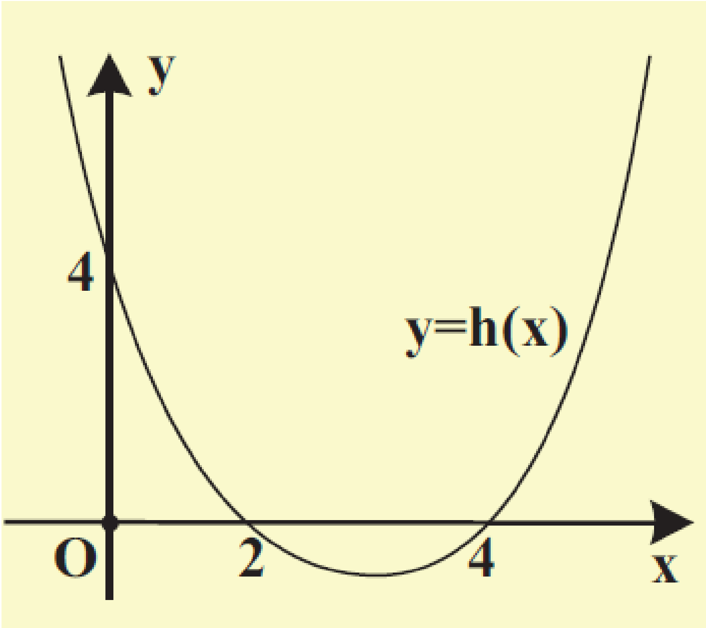


11. Ένας χημικός έχει τρία διαλύματα από το ίδιο οξύ. Το πρώτο περιέχει 50% οξύ, το δεύτερο 10% οξύ και το τρίτο 30% οξύ. Ο χημικός θέλει να παρασκευάσει 52 lit διάλυμα περιεκτικότητας 32% σε οξύ, χρησιμοποιώντας και τα τρία διαλύματα και μάλιστα η ποσότητα του πρώτου διαλύματος να είναι διπλάσια από την ποσότητα του τρίτου διαλύματος. Να βρείτε πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα θα χρησιμοποιήσει.

12. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τα τριώνυμα αυτά.


y
3
y=f(x)
O
x
K(2, –1)


y
K(1,4)
y=g(x)
–1
O
x



1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση πολλών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε ένα σύνολο εξισώσεων των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, αλλά οι εξισώσεις αυτές δεν είναι όλες γραμμικές.

Για παράδειγμα, έστω ότι ζητάμε δυο αριθμούς με άθροισμα 13 και άθροισμα τετραγώνων 89.
Αν x, y είναι οι δύο αριθμοί , τότε πρέπει $x+y=13$ και $x^2+y^2=89$. Επειδή ζητάμε και κοινές λύσεις των δύο εξισώσεων, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=13 & (1) \\ x^2+y^2=89 & (2) \end{cases}$$

Για τη λύση του συστήματος εργαζόμαστε ως εξής: Επιλύουμε την (1), ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς x , και αντικαθιστούμε στη (2).

Έχουμε

$x + y = 13 \Leftrightarrow y = 13 - x \qquad (3).$

Επομένως

$$\begin{aligned} & x^2 + (13 - x)^2 = 89 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 169 - 26x + x^2 = 89 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 - 26x + 80 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 13x + 40 = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 9 . Επομένως:

$$x = \frac{13 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \to 8 \\ \to 5 \end{cases}$$

Από την (3), για x=8 έχουμε y=5 , ενώ για x=5 έχουμε y=8 . Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (8, 5) και (5, 8) .

Η απάντηση βέβαια στο πρόβλημα είναι ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 5 και 8.

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, διάφορες περιπτώσεις επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α΄ τρόπος

Επιλύουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε:

$$x+y=5 \Leftrightarrow y=5-x \text{ (3).}$$

Επομένως

$$xy=6 \Leftrightarrow x(5-x)=6$$
$$\Leftrightarrow 5x-x^2=6$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \quad \text{ή} \quad x=3.$$

Από την (3) για x=2 έχουμε y=3 , ενώ για x=3 έχουμε y=2 . Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (2, 3) και (3, 2) .

β΄ τρόπος

Εξετάζοντας το σύστημα βλέπουμε ότι αναζητούμε δύο αριθμούς για τους οποίους γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. Επομένως, από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης

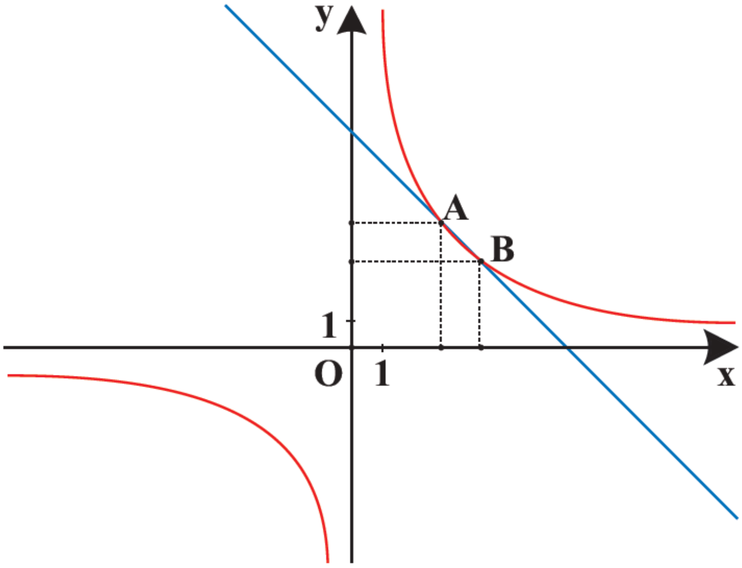
$$\omega^2-5\omega+6=0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι 2 και 3 οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,3) και (3,2).

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $x+y=5$ παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση $xy=6$ παριστάνει την υπερβολή $y=\frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των

κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Τα σημεία τομής είναι τα A(2,3) και B(3,2) . Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (2,3) και (3,2) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο :

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} xy = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε

$$xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x}$$

οπότε η (2) γίνεται:

$$x^2+y^2=13 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\left(\frac{6}{x}\right)^2=13 \Leftrightarrow$$

$$x^2+\frac{36}{x^2}=13 \Leftrightarrow$$

$$x^4+36=13x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^4-13x^2+36=0$$

Η εξίσωση αυτή είναι διτετράγωνη. Αν θέσουμε $x^2=\omega$, τότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2-13\omega+36=0$, της οποίας οι λύσεις είναι η ω=9 και η ω=4 .

✓Για ω=9 έχουμε

$x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \quad$ **ή** $\quad x=-3$

Από την (1) για x=3 παίρνουμε y=2 και για $x=-3$ παίρνουμε $y=-2$.

✓Για ω = 4 έχουμε

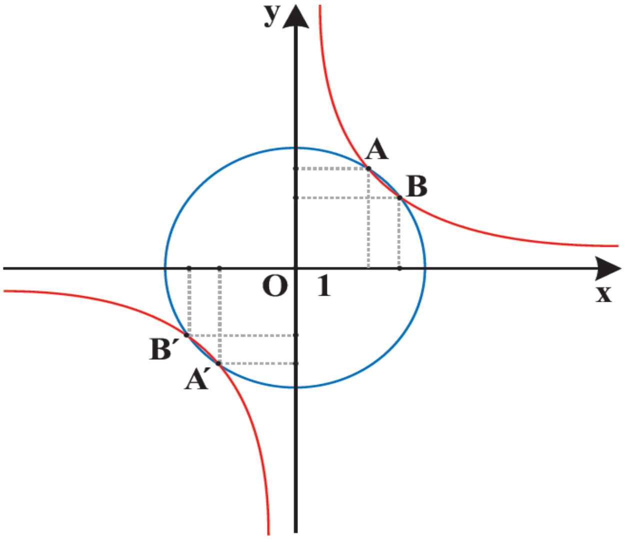
$x^2=4 \Leftrightarrow x=2 \quad$ **ή** $\quad x=-2$.

Από την (1) για x=2 παίρνουμε y=3 και για $x=-2$ παίρνουμε $y=-3$.

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις τις (3,2), (-3,-2), (2,3) και (-2,-3) .

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $xy=6$ παριστάνει την υπερβολή $y=\frac{6}{x}$, ενώ η δεύτερη εξίσωση $x^2+y^2=13$ παριστάνει κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{13}$. Επομένως οι συντεταγμένες των σημείων τομής της υπερβολής και του κύκλου θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}.$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} y=3x^2 \\ 12x-3y=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x-y=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

3. Από τους τύπους $S=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ και $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$, να δείξετε ότι $S=\frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}\cdot t$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 = 2y + 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

2. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι $120cm^2$. Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά 3cm , ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά 2cm , τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

4. Δίνεται η παραβολή $y = -x^2$ και η ευθεία $y = 2x + k, \quad k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

5. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα:

$(\Sigma_1): \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$,

$(\Sigma_2): \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$,

$(\Sigma_3): \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$,

$(\Sigma_4): \begin{cases} x - y = 1 \\ x + \alpha^2 y = 1 \end{cases}$

με εκείνη από τις απαντήσεις Α, Β, Γ που νομίζετε ότι είναι η σωστή.

Α) Έχει μοναδική λύση, Β) Είναι αδύνατο, Γ) Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)	(Σ_4)

ΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.	**Α Ψ**
2. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα είναι D = 0 , τότε το σύστημα είναι κατ' ανάγκη αδύνατο.	**Α Ψ**
3. Το σύστημα $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ **είναι αδύνατο.**	**Α Ψ**
4. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ **και η παραβολή** $y = x^2 + 1$ **δεν έχουν κοινά σημεία.**	**Α Ψ**

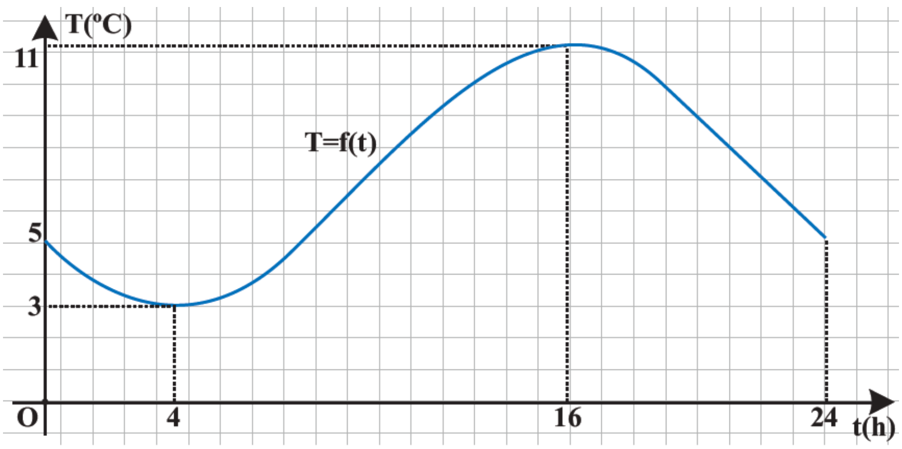
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^o – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε την έννοια της συνάρτησης και μελετήσαμε ορισμένες βασικές συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε στη γενική τους μορφή ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεων.

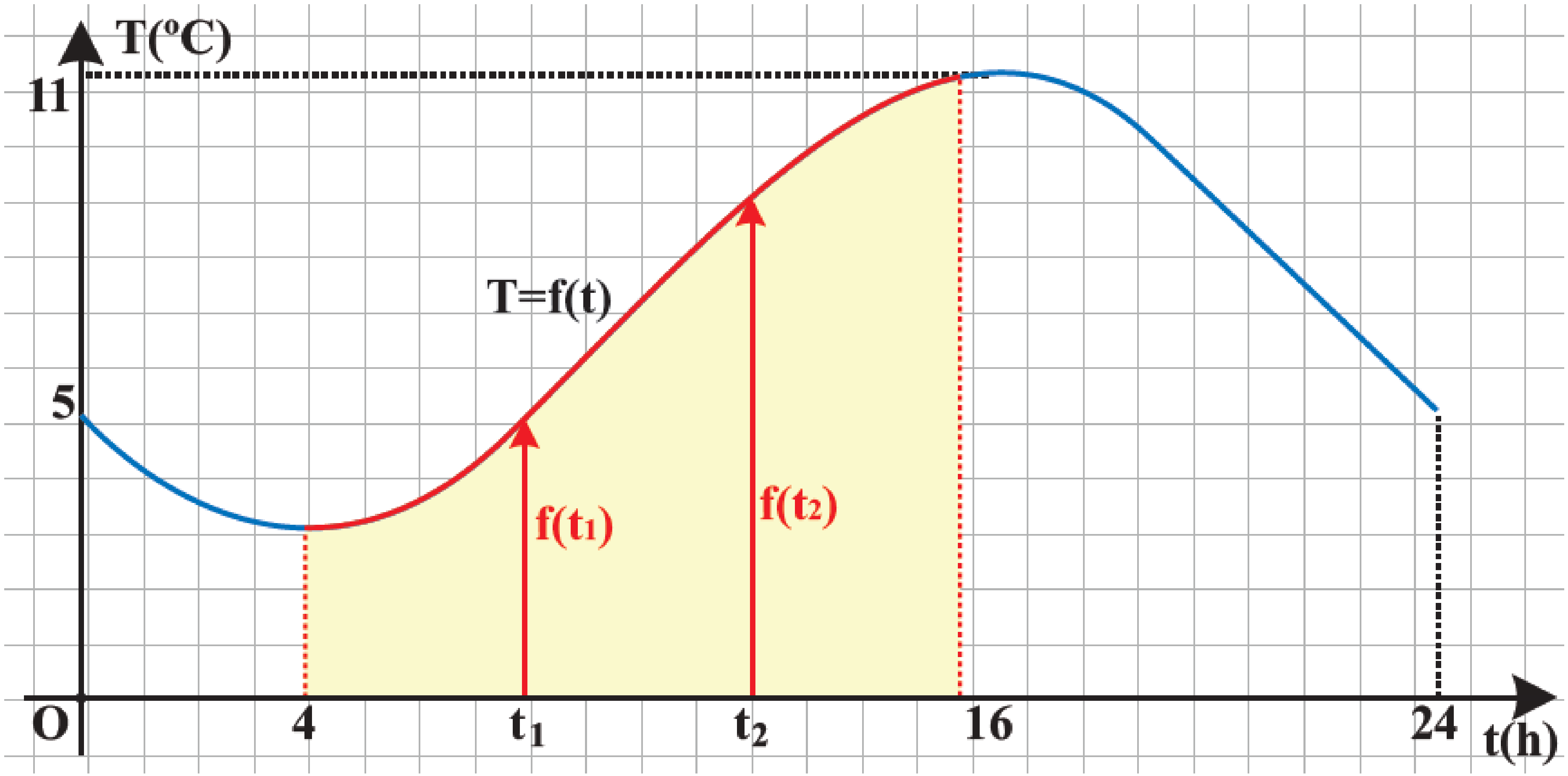
2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία Συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης T = f (t) που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας (t =0) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας (t =24).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16] . Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \nearrow \Delta$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

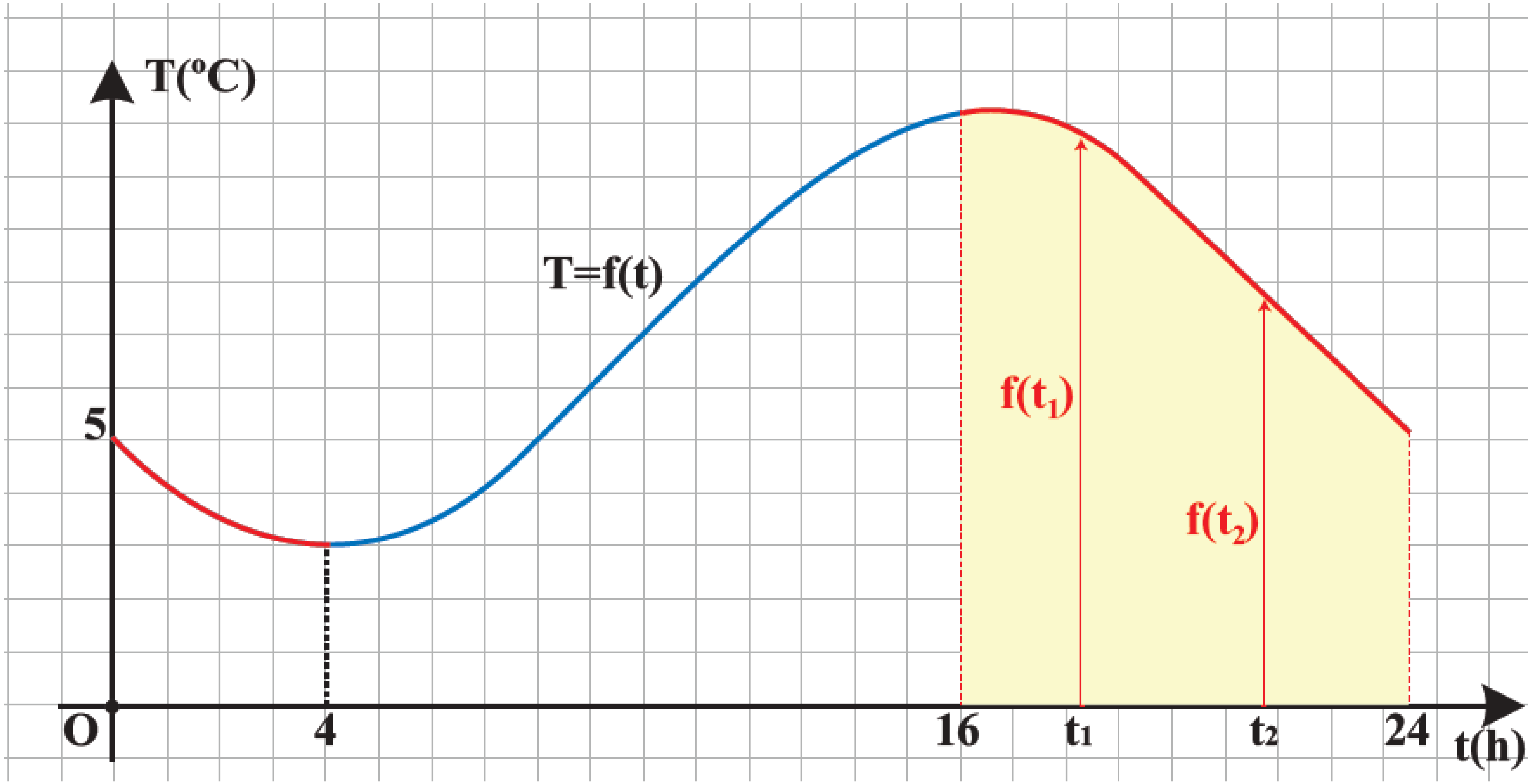
Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$
$$\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.


T(ºC)
T=f(t)
5
O
4
16
t1
t2
24
t(h)
f(t1)
f(t2)

Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24]. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ & \Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ & \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

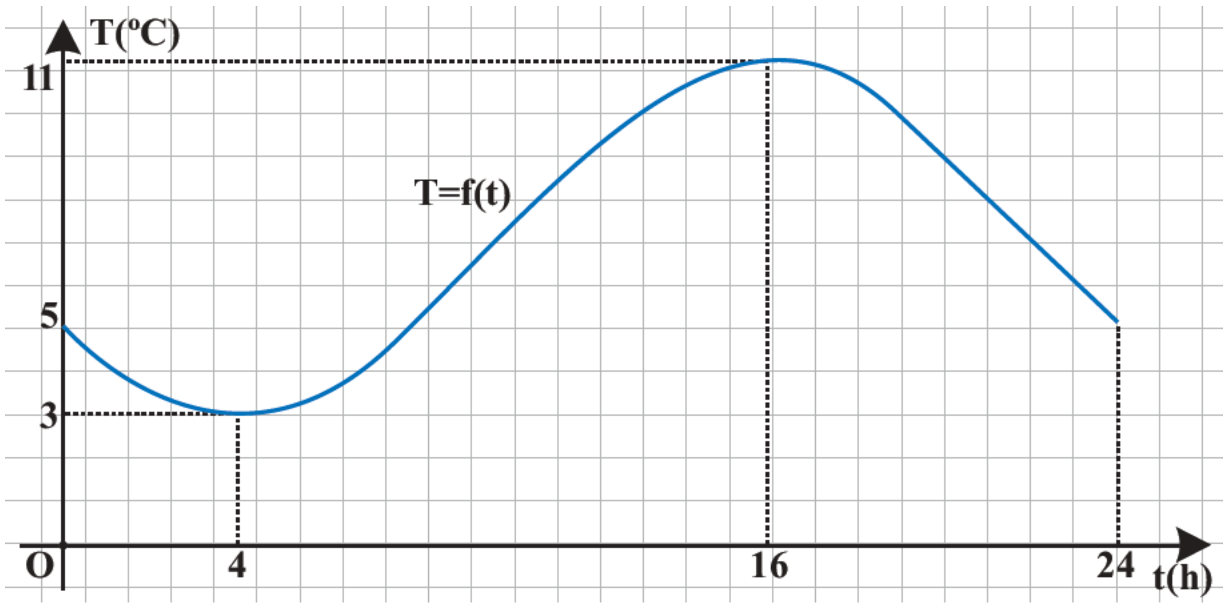
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης T = f (t).



Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \geq f(4) = 3,$$
$$\text{για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση T = f (t) παρουσιάζει στο t = 4 ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν:

$$f(x) \geq f(x_0),\ \text{για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλώς ελάχιστο της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με min f (x) .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$.

Επειδή

$$x^4 \geq 0,\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}\ ,$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0,\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1,\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0),\ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η Τ(16)=11 βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \leq f(16) = 11,\ \text{για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση Τ =f (t) παρουσιάζει στο t =16 μέγιστο, το f (16)=11 . Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει
στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν
$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ολικό μέγιστο ή απλώς μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με max f (x) .

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \ge 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$-3x^4 \le 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

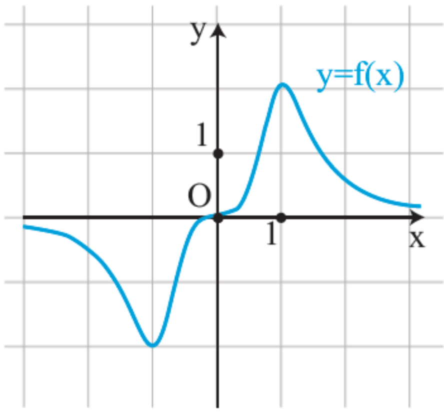
$$-3x^4 + 1 \le 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

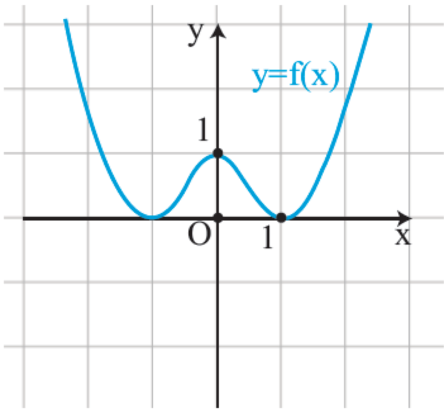
$$f(x) \le f(0), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά ακρότατα αυτής.

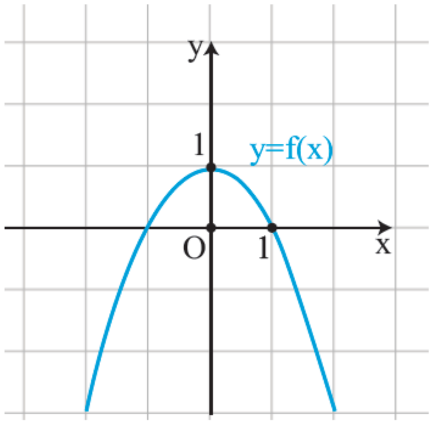
ΣΧΟΛΙΟ:
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β΄) ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ΄) ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ΄).



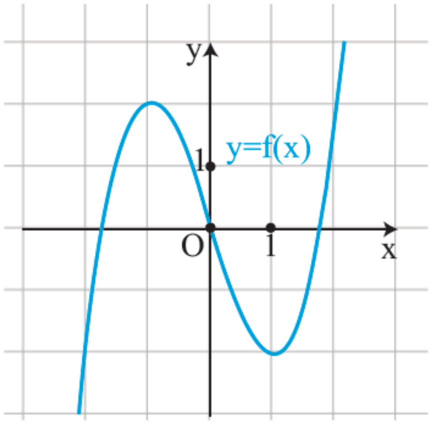
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



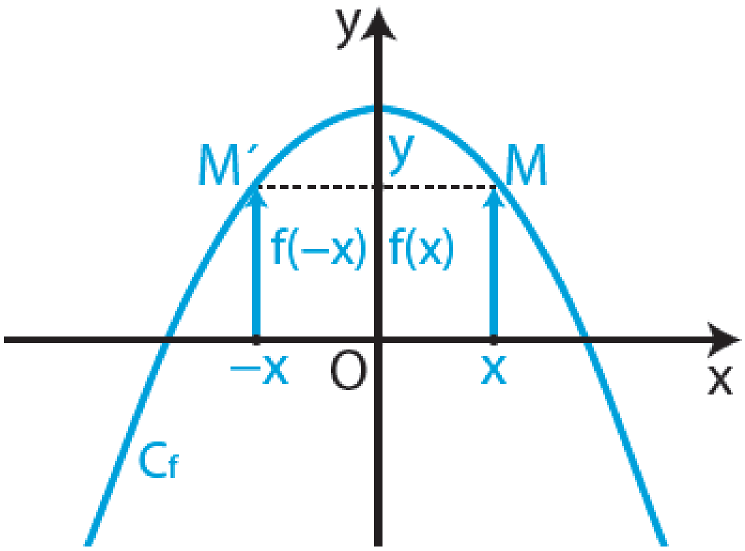
Σχήμα δ΄

Άρτια συνάρτηση

α) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο

ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y ' y , αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y ' y ανήκει στην C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C f ως προς τον άξονα y ' y είναι το σημείο M '(-x, y) και επειδή τα σημεία
M(x, y) και M '(-x, y) ανήκουν στην C_f, θα ισχύει y = f (x) και y = f (-x) , οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέμε λέγεται άρτια. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση,

αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

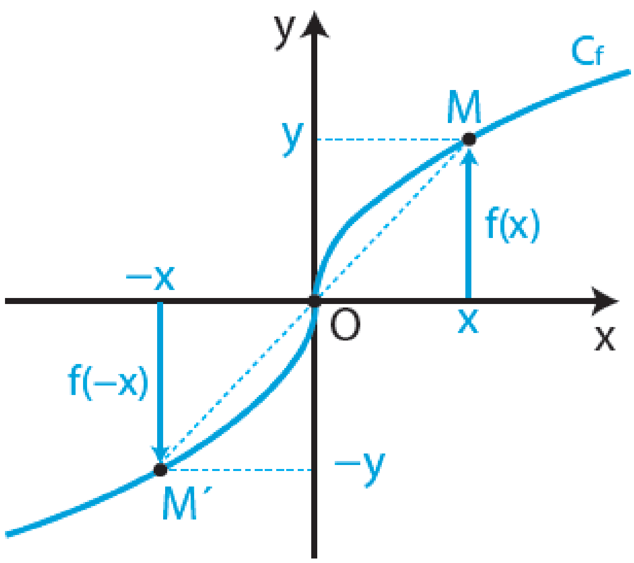
$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 =$$
$$= 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y ' y .

Περιττή συνάρτηση

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το R .

Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στην C_f .



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο M '(-x,-y) και επειδή τα σημεία M(x, y) και M '(-x,-y) ανήκουν στην C_f, θα ισχύει y = f (x) και -y = f (-x) , οπότε θα έχουμε:

$$f(-x)=-f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται περιττή. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται περιττή, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x)=-f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^3-x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=$$
$$=-2x^3+x=-f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y ' y , είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y=x$,

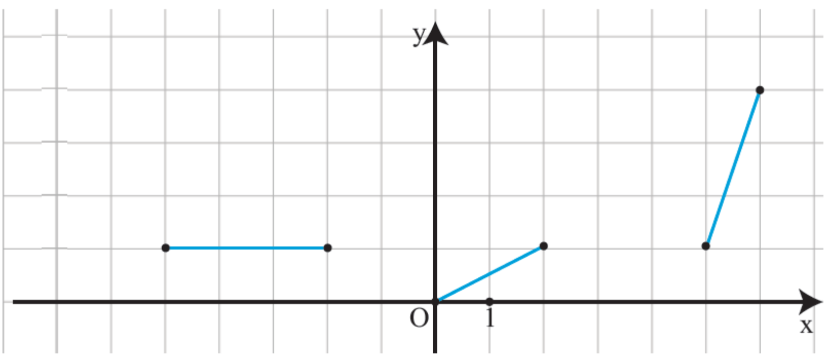
$y = x^3$, $y = x^5$ κτλ., που έχουν περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [-6,6] .
Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της
συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

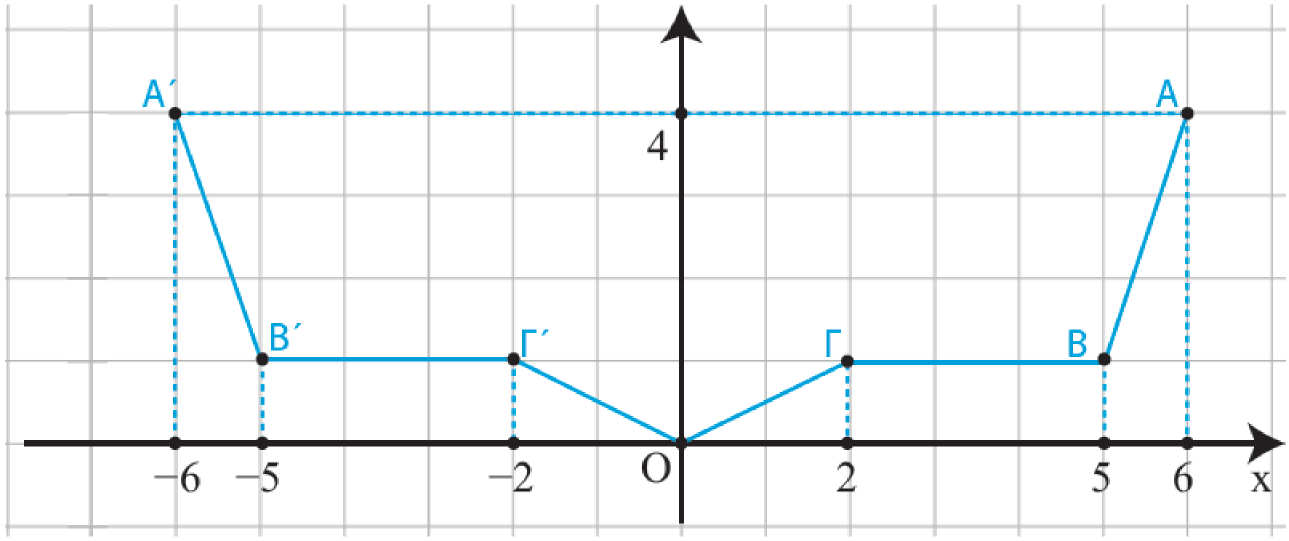
α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f :
i) είναι γνησίως αύξουσα,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα
iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f , καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y ' y . Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα y ' y των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της f ,θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f , που είναι η πολυγωνική γραμμή Α΄Β΄Γ΄ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f :
i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα [0,2] και [5,6] ,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα [-2,0] και [-6,-5] , τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων [0,2] και [5,6] αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα [-5,-2] και [2,5] τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

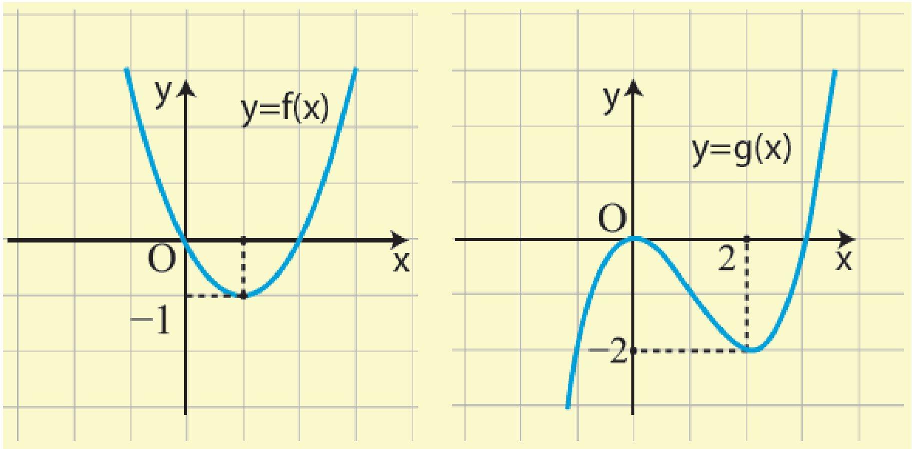
$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

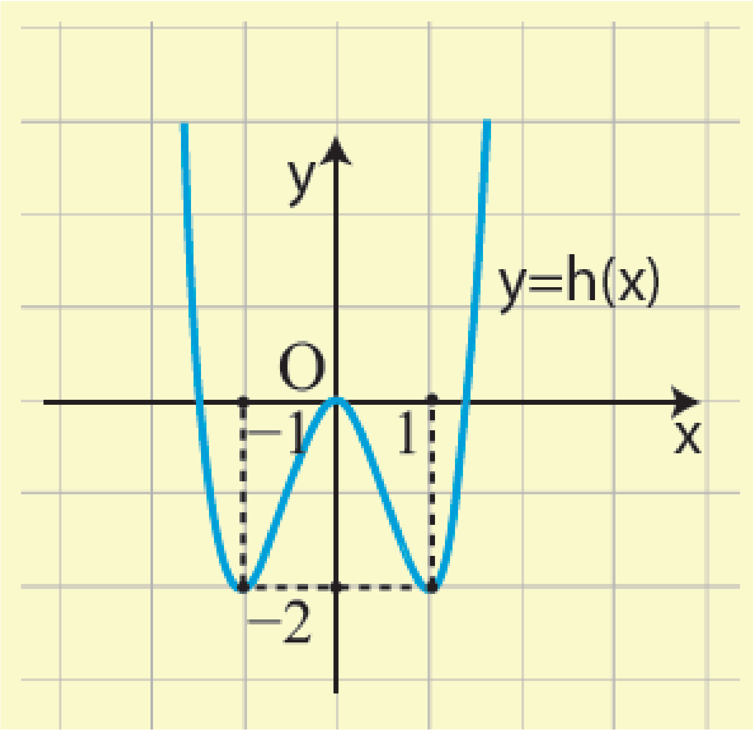
Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:
$\min f(x) = f(0) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:
α) γνησίως αύξουσα και
β) γνησίως φθίνουσα.





2) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x = 3 .

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x =1 .

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x)=3x^2+5x^4$

ii) $f_2(x)=3|x|+1$

iii) $f_3(x)=|x+1|$

iv) $f_4(x)=x^3-3x^5$

v) $f_5(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

vi) $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f_1(x)=\dfrac{1}{|x|}$

ii) $f_2(x)=\sqrt{x-2}$

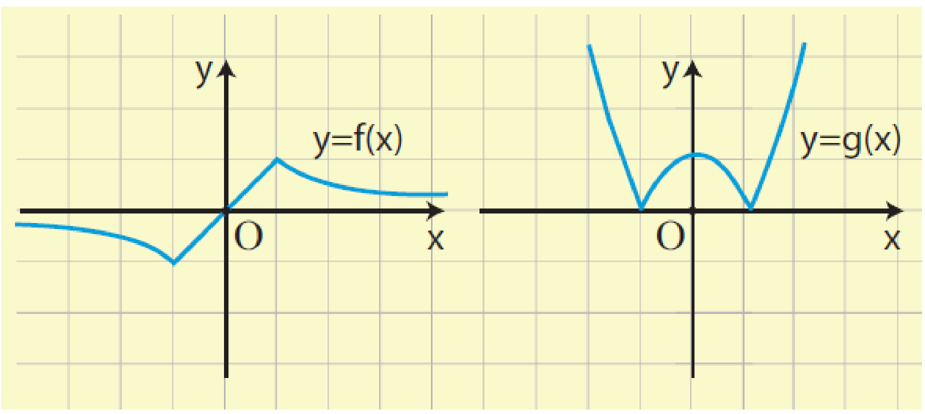
iii) $f_3(x)=|x-1|-|x+1|$

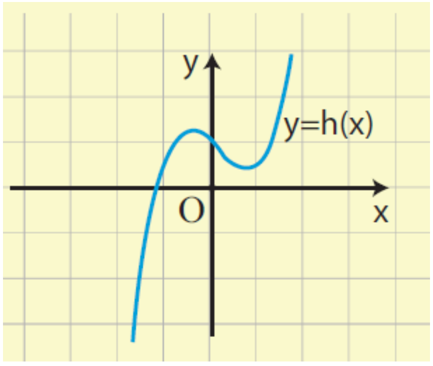
iv) $f_4(x)=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$

v) $f_5(x)=\sqrt{|x|}$

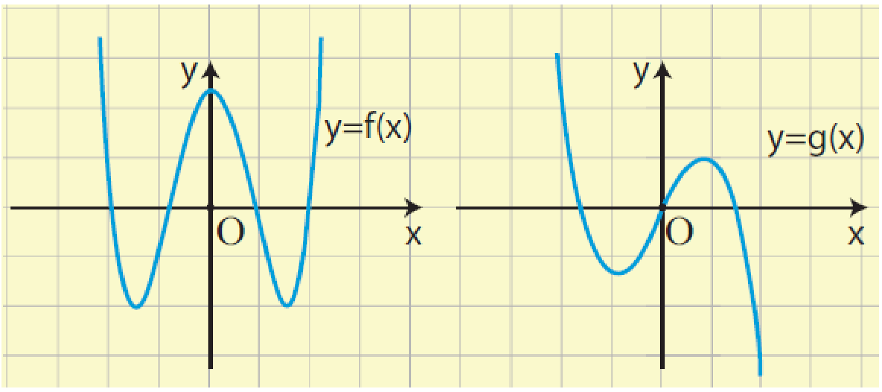
vi) $f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$.

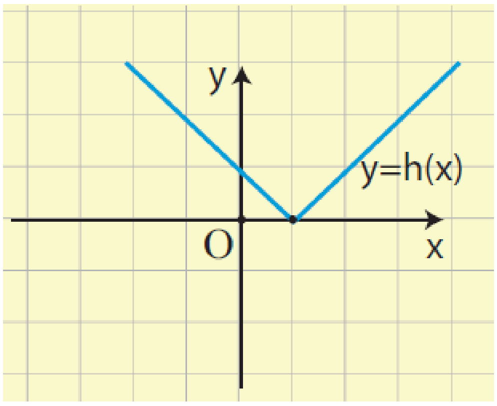
6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



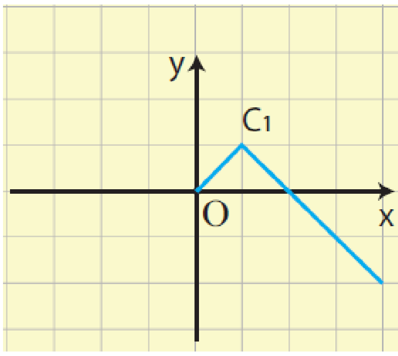


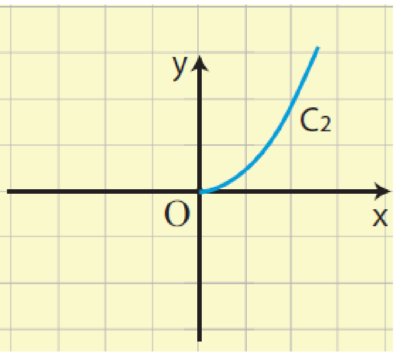
7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές

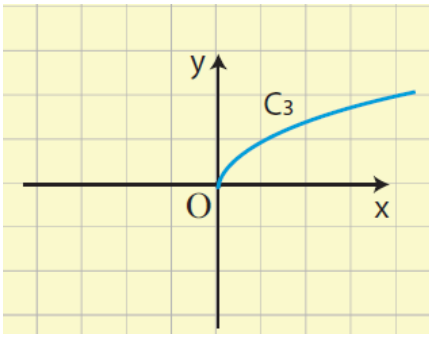




8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις
α) Άρτιας συνάρτησης και
β) Περιττής συνάρτησης.







2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|+1$. Επειδή

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν} \quad x<0 \\ x+1, & \text{αν} \quad x\geq 0\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|+1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 0$ και

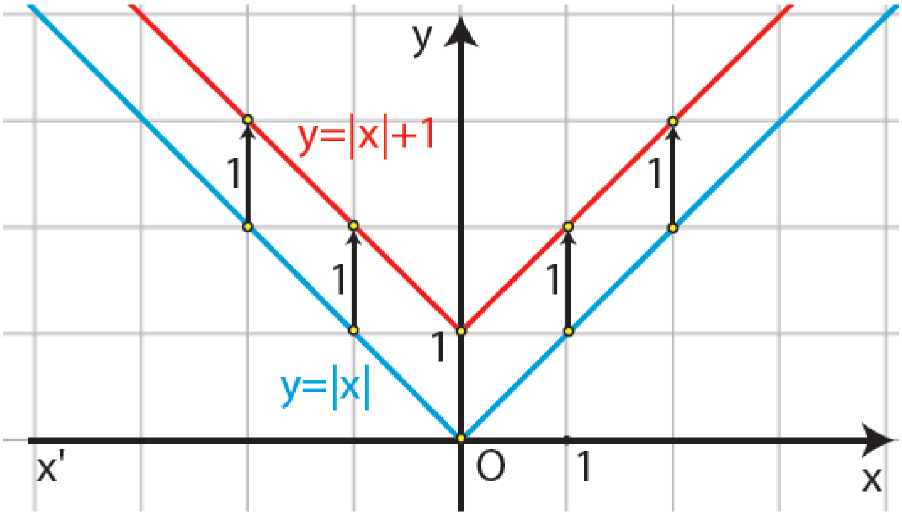
✓ $y=x+1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο 1

του άξονα y ' y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους

των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$

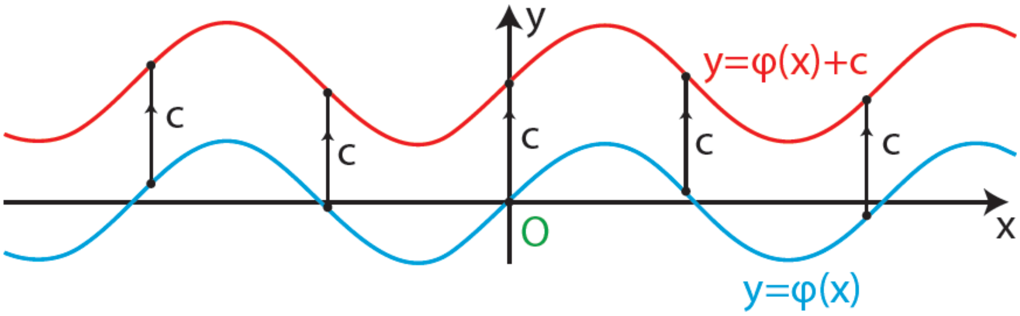
από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = |x|$ κατακόρυφα (1) και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x) = |x| + 1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :
$f(x) = \varphi(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
που σημαίνει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το
$f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:
$f(x) = \varphi(x) + c$, όπου $c > 0$,
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα α΄)



Σχήμα α΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|-1$. Επειδή

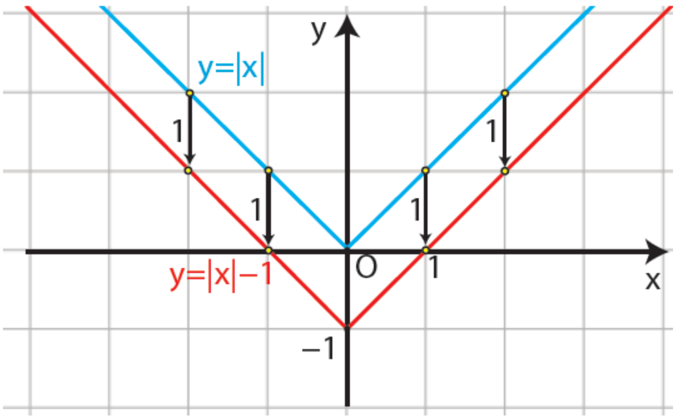
$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν} \quad x<0\\ x-1, & \text{αν} \quad x\geq 0\end{cases}$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα y ' y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$



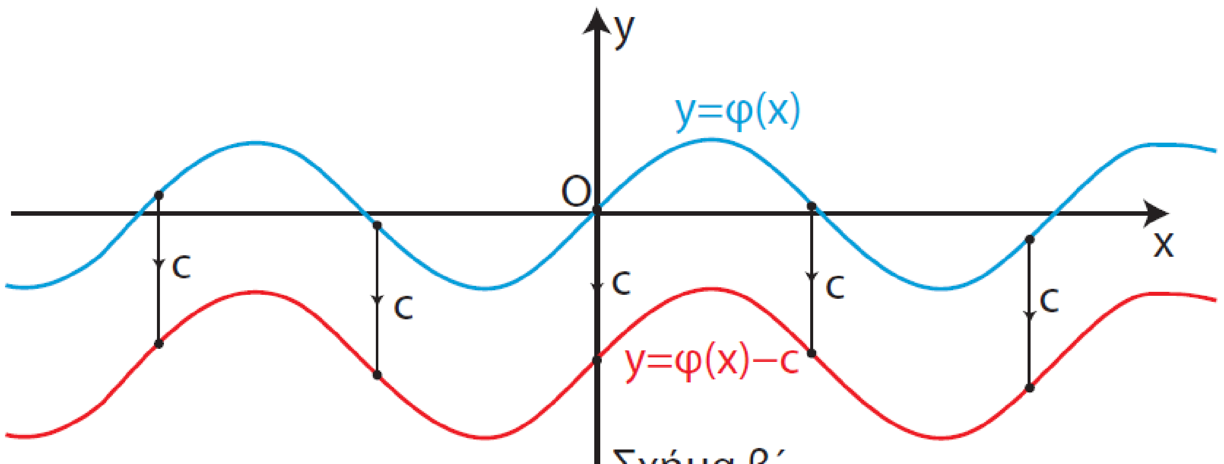
από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $f(x)=\varphi(x-c)$ $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα y ' y .

Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει :
$f(x)=\varphi(x)-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το f (x) είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του φ(x) .

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:
$f(x)=\varphi(x)-c$, όπου $c>0$,
προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης
της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω (Σχήμα β΄)



Σχήμα β΄

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|$. Επειδή

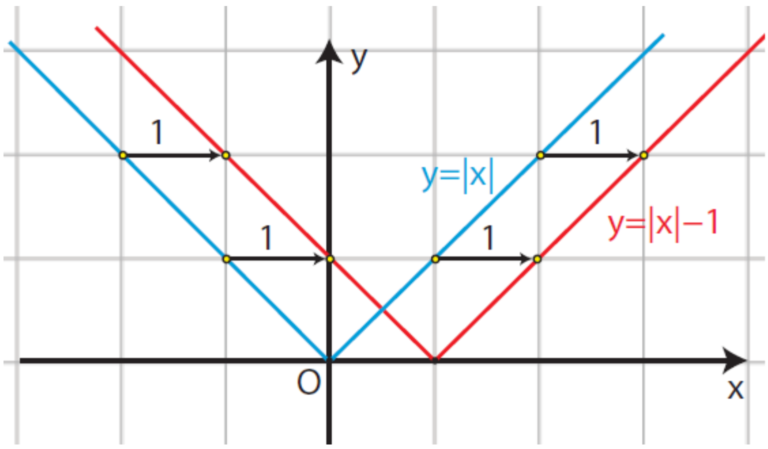
$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν} \quad x<1\\ x-1, & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 1$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 1$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα $x'x$ και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$



από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

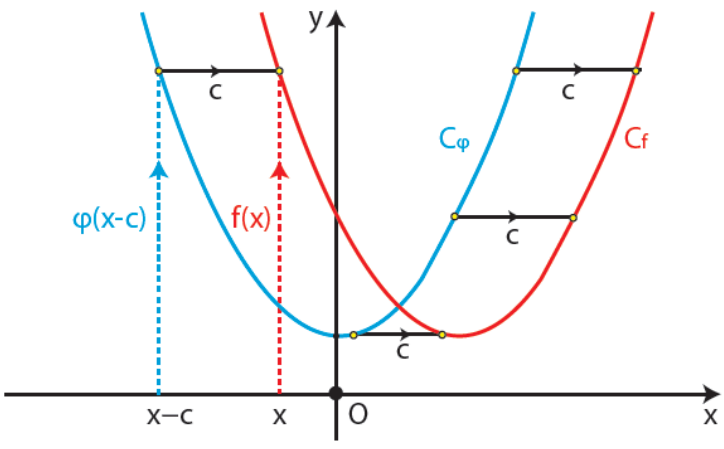
Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια(2) και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική

παράσταση της $f(x)=|x-1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει $f(x)=\varphi(x-1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x-1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση x -1.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:
, όπου c > 0 ,προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά (Σχήμα γ΄).

Πράγματι επειδή $f(x)=\varphi(x-c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x-c$, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ΄).



Σχήμα γ΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x+1|$. Επειδή

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν } \ x<-1\\ x+1, & \text{αν } \ x\geq -1\end{cases},$$

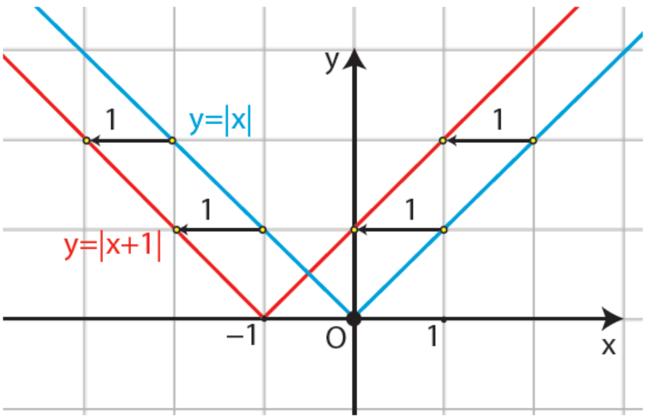
(2)Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα x ' x .

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x+1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq -1$και

✓ $y=x+1$, με $x\geq -1$,

που έχουν αρχή το σημείο -1του άξονα x ' x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

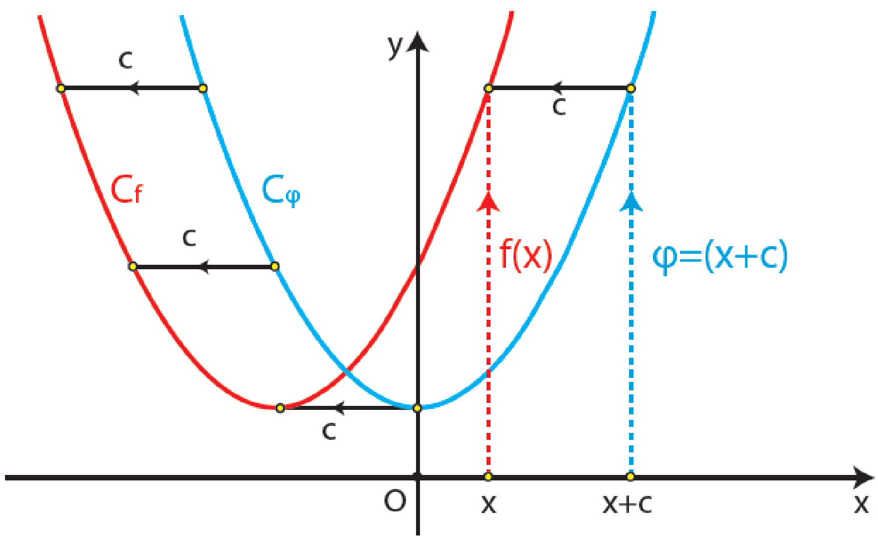


Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική

παράσταση της $f(x)=|x+1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει
$f(x)=\varphi(x+1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x+1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση x +1.
Γενικά:
Πράγματι, επειδή $f(x)=\varphi(x+c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x + c , που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η

> **Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:**
> **$f(x)=\varphi(x+c)$, όπου c > 0 ,**
> **προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της**
> **φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά (Σχήμα δ΄).**

γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ΄).



Σχήμα δ΄

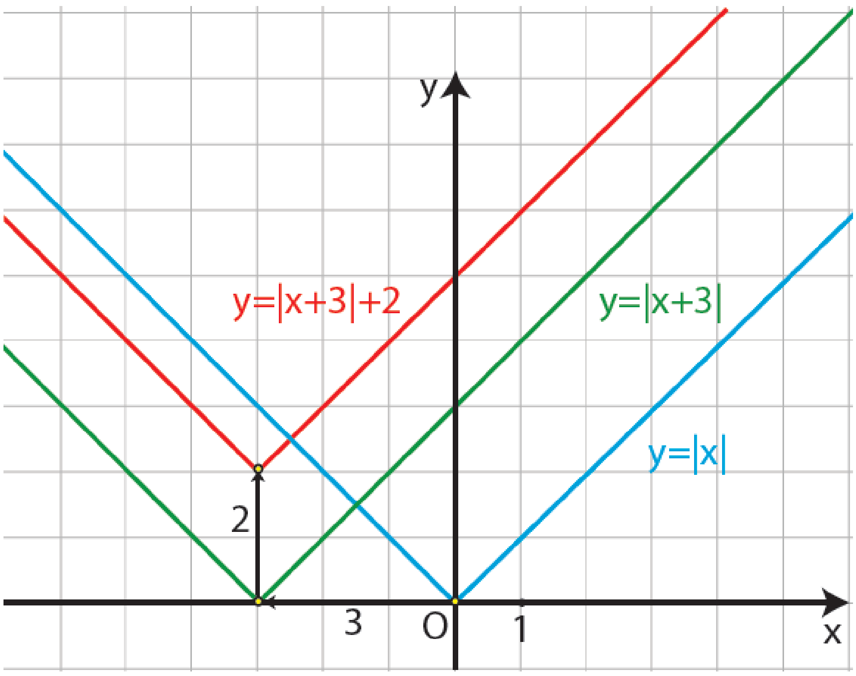
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=|x+3|+2$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά χαράσσουμε την $y=|x+3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y=|x+3|+2$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=|x+3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως, η γραφική παράσταση της $f(x)=|x+3|+2$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).



ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:
$f(x) = \varphi(x \pm c) \pm d$, με c,d > 0
Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$\varphi(x) = |x|$,

$f(x) = |x| + 2$ και

$g(x) = |x| - 2$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x) = |x|$,

$h(x) = |x + 2|$ και

$q(x) = |x - 2|$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x) = |x|$,

$F(x) = |x + 2| + 1$ και

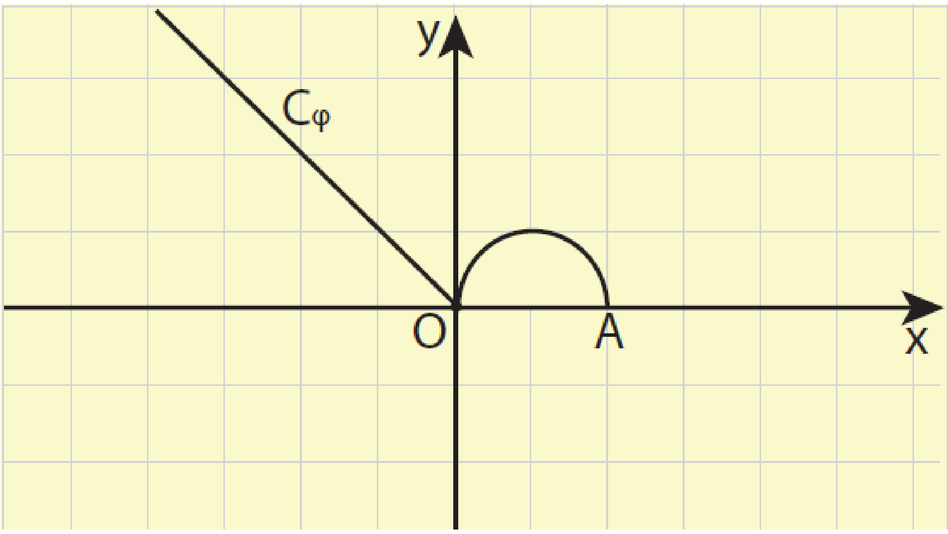
$G(x) = |x - 2| - 1$.

4. i) Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ στη μορφή
$f(x) = \alpha(x - p)^2 + q$
και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της

συνάρτησης $g(x)=2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2+8x-9$, θεωρώντας ως g την $g(x)=-2x^2$.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από την διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία O(0,0) και A(2,0) .



Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\varphi(x)+2$ και
$g(x)=\varphi(x)-2$

ii) $h(x)=\varphi(x+3)$ και
$g(x)=\varphi(x-3)$

iii) $F(x)=\varphi(x+3)+2$ και
$G(x)=\varphi(x-3)-2$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2-1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική

παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:
i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.
ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.
iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδες προς τα πάνω.
iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η - f είναι γνησίως φθίνουσα.	**Α**	**Ψ**
2. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.	**Α**	**Ψ**
3. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) , Β(2,1) και Γ (3,3) .	**Α**	**Ψ**
4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει f (0) < 0.	**Α**	**Ψ**
5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,5) , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.	**Α**	**Ψ**
6. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση f (x) = 2 είναι αδύνατη.	**Α**	**Ψ**

7. Η συνάρτηση $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x^2$ είναι άρτια.	**Α Ψ**
8. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό –ρ.	**Α Ψ**
9. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη.	**Α Ψ**
10. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η -f είναι περιττή.	**Α Ψ**

ΙΙ) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση f.
Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x)=3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x)=3(x-1)^4+2$

Β) $f(x)=3(x-1)^4-2$,

Γ) $f(x)=3(x+1)^4+2$,

Δ) $f(x)=3(x+1)^4-2$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο} - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο} – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ